

Açık ve Kapalı Yüzeyle Sahip Bileşik Geometrilerin Karma Alan İntegral Denklemi ile Çözümü[†]

Özgür Ergül¹ ve Levent Gürel^{1,2}

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

²Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BiLCEM)

Bilkent Üniversitesi

TR-06800, Bilkent, Ankara

E-posta: ergul@ee.bilkent.edu.tr, lgurel@bilkent.edu.tr

Özet: Açık ve kapalı yüzeylere sahip bileşik geometrilere ait elektromanyetik problemlerin doğru ve hızlı sayısal çözümleri ele alınmıştır. Açık ve kapalı kısımlara sırasıyla elektrik alan integral denklemi (EAİD) ve birleşik alan integral denklemi uygulanmış, böylece karma alan integral denklemi elde edilmiştir. Bu sayede yüksek çözülebilirliğe sahip matris denklemleri elde edilmiş, bunların iteratif çözümlerinin EAİD formülasyonuna göre çok daha hızlı bir şekilde yapılabildiği gösterilmiştir.

1. Giriş

Işınım ve saçılım problemlerinin integral formülasyonları genel olarak üç çeşit denklemle gerçekleştirilir. Bunlar, elektrik alan integral denklemi (EAİD) (EFIE: electric-field integral equation), manyetik alan integral denklemi (MAİD) (MFIE: magnetic-field integral equation) ve

$$BAİD = \alpha EAİD + (1 - \alpha) MAİD \quad (1)$$

şeklinde gösterilebilen birleşik alan integral denklemidir (BAİD) (CFIE: combined-field integral equation). BAİD'in EAİD ve MAİD'den elde edilmesinde kullanılan α parametresinin değeri 0 ile 1 arasındadır. MAİD ve BAİD sadece kapalı yüzeylere uygulanabildiklerinden, açık yüzeylere sahip geometrilerin çözümlerinde EAİD'nin kullanılması zorunludur. Bu durum, geometrinin çoğu kapalı olsa bile geçerlidir. Öte yandan, özellikle kapalı yüzeylere uygulandığında, EAİD'den türetilen matris denklemlerinin çözülebilirliği düşüktür. Sonuç olarak, hem açık, hem de kapalı yüzeylere sahip geometrilere ait elektromanyetik problemlerin iteratif çözümleri oldukça zordur. Problemin boyutlarının büyümesiyle birlikte bu zorluk daha da artmakta ve çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) (MLFMA: multilevel fast multipole algorithm) [1] gibi hızlandırıcı tekniklerle bile sayısal çözümler verimli olamamaktadır.

Bu çalışmada, bileşik geometrilere ait problemlerin çözümlerinin verimli bir biçimde yapılabilmesi için karma alan integral denklemi (KAİD) önerilmektedir. Bu denklem

$$KAİD = \alpha_m EAİD + (1 - \alpha_m) MAİD \quad (2)$$

şeklinde gösterilebilir. BAİD'den farklı olarak bu denklemdeki α_m parametresi serbest bırakılmıştır ve sınır koşullarının uygulandığı yere bağlı olarak değişebilmektedir. Dolayısıyla, bileşik geometrinin açık kısımlarında $\alpha_m = 1$ seçilerek EAİD uygulanırken, kapalı kısımlarında $\alpha_m = 0.2$ seçilerek BAİD uygulanmış, böylece problemin çözülebilirliği artırılmıştır.

2. Karma Alan İntegral Denklemi

Mükemmel iletken cisimlere ait saçılım ve ışınım problemlerinin sayısal çözümlerinde elde edilen matris denklemleri

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn}^{E,M,B,K} a_n = v_m^{E,M,B,K}, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

[†]Bu çalışma, TÜBİTAK (105E172), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

şeklinde gösterilebilir. Boyutları $N \times N$ olan bu denklemde, a_n bilinmeyen yüzey akımını modelleyen temel fonksiyonların katsayılarını ifade etmektedir. Matris elemanları, EAİD ve MAİD için sırasıyla

$$Z_{mn}^E = \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \quad \text{ve} \quad Z_{mn}^M = \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^s(\mathbf{r}) \quad (4)$$

olarak, saçılan elektrik ve manyetik alanların test fonksiyonları $[\mathbf{t}_m(\mathbf{r}), m = 1, 2, \dots, N]$ ile test edilmesi şeklinde yazılabilir. Sağ taraf vektörünün elemanları ise

$$v_m^E = \frac{i}{k\eta} \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad \text{ve} \quad v_m^M = \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) \quad (5)$$

şeklinde gelen elektrik ve manyetik alanlar cinsinden ifade edilebilir. BAİD için (1) kullanıldığında,

$$Z_{mn}^B = \alpha Z_{mn}^E + (1 - \alpha) Z_{mn}^M \quad \text{ve} \quad v_m^B = \alpha v_m^E + (1 - \alpha) v_m^M \quad \left(m, n = 1, 2, \dots, N \right) \quad (6)$$

elde edilir. Bu denklemde MAİD tüm geometri üzerinde uygulandığından, BAİD'in getirdiği avantajlar, yani iç rezonans sorunlarından etkilenmeme ve yüksek çözülebilirlik özellikleri [2], sadece tamamen kapalı yüzeylere sahip problemler için geçerlidir. Öte yandan, (2)'de verilen KAİD uygulandığında,

$$Z_{mn}^K = \alpha_m Z_{mn}^E + (1 - \alpha_m) Z_{mn}^M \quad \text{ve} \quad v_m^B = \alpha_m v_m^E + (1 - \alpha_m) v_m^M \quad \left(m, n = 1, 2, \dots, N \right) \quad (7)$$

elde edilir. Böylece, geometrinin açık kısımlarında $\alpha_m = 1$ alınarak EAİD kullanılırken kapalı kısımlarında $\alpha_m \neq 1$ alınarak BAİD uygulanabilir. Bu sayede, önceden sadece EAİD ile çözülebilen bileşik geometrilerle sahip problemlerin çok daha verimli çözümleri elde edilebilir.

KAİD ile elde edilen sistemler karedir ve diğer denklemlerin çözümünde kullanılan iteratif yöntemler bu denkleme de uygulanabilmiştir. Ayrıca matris-vektör çarpımları ÇSHÇY ile hızlı bir şekilde yapılmaktadır. ÇSHÇY'nin KAİD sistemlerinde uygulanması kolaylıkla gerçekleştirilmiş ve diğer denklemler için üretilen yazılımlar çok az değişikliklerle bu denklem için de kullanılabilmiştir.

3. Sayısal Örnekler

KAİD ile elde edilen verimin gösterilmesi amacıyla $60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ boyutlarında bir levha ile bu levhanın üstünde 50 cm uzaklığa yerleştirilmiş 30 cm yarıçapa sahip bir küreden oluşan bileşik bir cisme ait saçılım problemi ele alınmıştır. Levha ve küre geometrileri sırasıyla açık ve kapalı mükemmel iletkenler olarak modellenmişlerdir. Problemin 600 MHz ve 6 GHz çözümleri için sırasıyla 1767 ve $181,536$ bilinmeyenli matris denklemleri oluşturulmuştur. Şekil 1'de problemin iki farklı frekansta, EAİD ve kapalı yüzeylerde MAİD veya BAİD'in kullanılmasıyla elde edilen KAİD formülasyonları için elde edilen iteratif çözümleri gösterilmiştir. İteratif çözümler CGS metoduyla gerçekleştirilmiş, matris-vektör çarpımları ÇSHÇY ile hızlandırılmıştır. Her iki frekansta da EAİD ile karşılaştırıldığında, KAİD'in uygulanmasıyla birlikte iteratif yöntemlerin yakınsama hızının önemli ölçüde arttığı gözlemlenmiştir. Özellikle kapalı yüzeylerde BAİD'in uygulanmasıyla birlikte iterasyon sayısı yarıya düşmüştür.

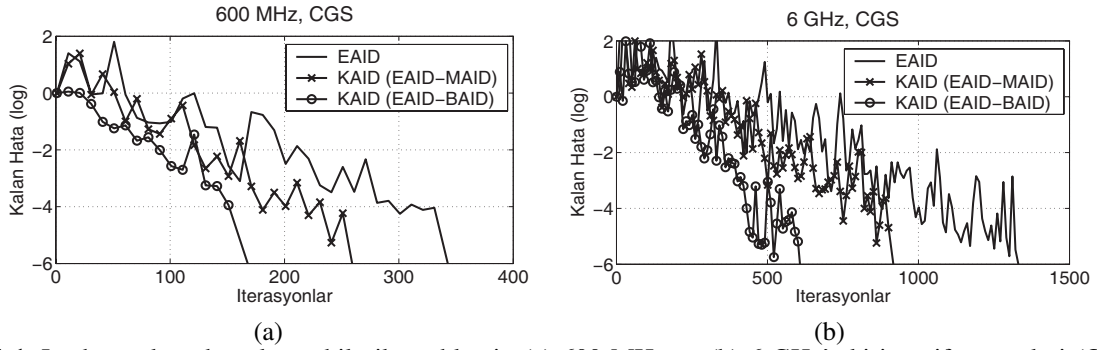
İterasyon sayılarının daha da azaltılması doğrultusunda EAİD için etkin olduğu bilinen LSQR yönteminin 6 GHz 'teki bileşik problem üzerinde uygulanmasıyla elde edilen iteratif çözümler Şekil 2(a)'da gösterilmiştir. Şekil 1(b)'de gösterilen CGS çözümleriyle karşılaştırıldığında, EAİD ve BAİD içeren KAİD formülasyonlarına ait çözümlerin hızlandığı, ancak KAİD'in yakınsama hızının halen iki kat daha fazla olduğu gözlemlenmektedir. İterasyon sayılarını azaltmanın başka bir yolu da öniyeleştirme teknikleridir. Örneğin, ÇSHÇY'nin ağaç yapısının en alt seviyesindeki grupların etkileşimlerinden elde edilen blok-diyagonal öniyeleştiricinin (BDÖ) (BDP: block-diagonal preconditioner) uygulanmasıyla elde edilen çözümler Şekil 2(b)'de gösterilmiştir. BDÖ'nün daha çok BAİD çözümlerini hızlandırdığı ve EAİD'de yakınsama hızını daha da yavaşlattığı bilinmektedir [3]. Şekil 2(b) ile Şekil 1(b) karşılaştırıldığında, bu durumun KAİD çözümlerinde de geçerli olduğu ve bu formülasyonların içinde bulunan EAİD etkileşimlerinden dolayı iteratif çözümlerin yavaşladığı gözlemlenmektedir.

Son olarak, ÇSHÇY'deki yakın alan etkileşimlerinin kullanılmasıyla elde edilen yakın-alan öniyeleştiricinin (YAÖ) (NFP: near-field preconditioner) uygulanmasıyla elde edilen iterasyonlar Şekil 3'te gösterilmiştir. YAÖ,

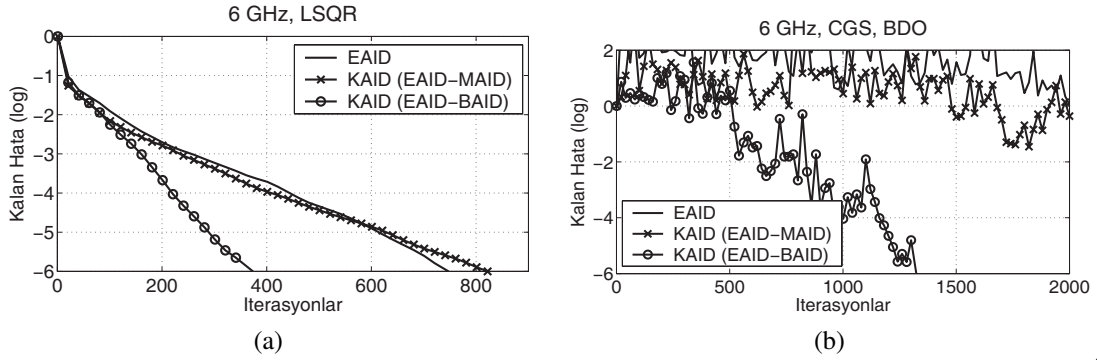
bellek kullanımı ve işlem zamanı bakımından pahalı bir öniyileştirici olduğundan büyük problemlerin çözümünde tercih edilmez. Ancak, yüksek iterasyon sayılarına sahip EAİD çözümlerini hızlandırmak için mümkün olduğu durumlarda kullanılabilir. Şekil 1 ile karşılaştırıldığında, Şekil 3'te gösterilen EAİD yakınsamalarının çok daha hızlı olduğu gözlemlenmektedir. Öte yandan, YAÖ ile KAİD çözümleri de önemli ölçüde hızlanmakta ve iterasyon sayısı EAİD'e göre yine daha az çıkmaktadır.

Kaynaklar

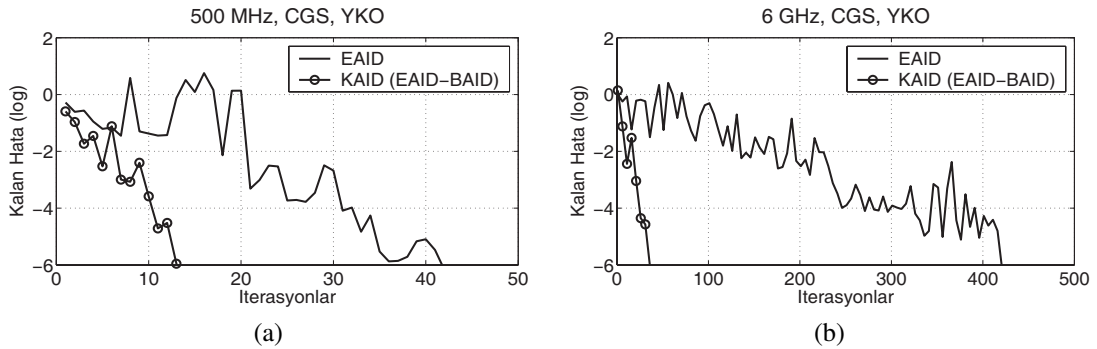
- [1] C.-C. Lu ve W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 45, no. 10, s. 1488–1493, Ekim 1997.
- [2] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Elektromanyetik saçınım problemlerinde elektrik alan, manyetik alan ve birleşik alan integral denklemleri," *URSI-Türkiye 2002 Bilimsel Kongresi*, İstanbul, Türkiye, s. 158–161, 2002.
- [3] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Comparisons of FMM implementations employing different formulations and iterative solvers," *IEEE Antennas and Propagation Soc. Int. Symp.*, cilt 3, s. 19–22, 2003.



Şekil 1. Levha ve küreden oluşan bileşik problemin (a) 600 MHz ve (b) 6 GHz'teki iteratif çözümleri (CGS).



Şekil 2. Bileşik problemin 6 GHz'teki iteratif çözümleri, (a) LSQR yöntemiyle, (b) CGS yöntemi ve BDÖ ile.



Şekil 3. Bileşik problemin (a) 600 MHz ve (b) 6 GHz'teki iteratif çözümleri (CGS ve YAÖ ile).