Elektrik Alan İntegral Denkleminin En Küçük Kareler Çözümü†

Özgür Ergül[1] ve Levent Gürel[1,2]
[1]Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
[2]Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BiLCEM)
Bilkent Üniversitesi
TR-06800, Bilkent, Ankara
E-posta: ergul@ee.bilkent.edu.tr, lgurel@bilkent.edu.tr

Özet: *Üç boyutlu karmaşık yüzeylere sahip geometrilere ait saçılım problemlerinin elektrik alan integral denkleminin kullanılmasıyla gerçekleştirilen çözümleri incelenmiştir. Elde edilen matris denklemlerinin iteratif çözümlerinde en-küçük-kareler QR (EKKQR) yönteminin diğer yöntemlere göre daha hızlı yakınsamalar verdiği gösterilmiştir. Özellikle büyük ve açık yüzeyli problemlerde, EKKQR yönteminin kullanılmasıyla birlikte çözümün verimi artmaktadır.*

1. Giriş

Son yıllarda, bilişimsel elektromanyetikteki gelişmeler sayesinde, çok büyük problemlerin yüksek doğruluktaki çözümleri mümkün hale gelmiştir. En çok kullanılan tekniklerden bir tanesi de problemlerin Krylov-altuzay metodlarıyla iteratif olarak çözülmesi ve bu çözümlerdeki matris-vektör çarpımlarının çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemiyle (ÇSHÇY) (MLFMA: multilevel fast multipole algorithm) hızlandırılmasıdır [1]. Öte yandan, pratik açıdan çözümü gereken pek çok problemin sayısal çözülebilirliği düşüktür. Bu problemlerin çözümünde iteratif yöntemlerin yakınsaması çok yavaştır ve pek çoğunda istenilen hassaslıktaki çözümlere ulaşabilmek için gerekli iterasyon sayısı kabul edilebilir sınırların üstündedir. Bu gibi durumlarda, ÇSHÇY gibi hızlandırıcılardan sağlanan verim anlamsız kalmaktadır. Bazı öniyileştirici (preconditioner) tekniklerle yakınsama hızının artırılması ve iterasyon sayılarının düşürülmesi mümkündür. Öte yandan, iyi bir öniyileştirici matrisinin hesaplanabilmesi için harcanan bilgisayar kaynakları ÇSHÇY'nin kullandığı kaynakları aşabilmekte, hatta tüm çözümün verimini düşürebilmektedir. Kısacası, büyük problemlerin çözümü için gerekli iterasyon sayılarının verimliliği bozmadan ve eldeki bilgisayar kaynaklarının sınırlarını aşmadan azaltılması oldukça zordur.

Genel bir matris denkleminin çözümü için pek çok iteratif yöntem saymak mümkündür. Bunlardan en çok kullanılanları Krylov-altuzay metodları olarak isimlendirilen CGS, BiCG, BiCGStab, GMRES, QMR, ve TFQMR gibi yöntemlerdir. Bu çeşitlilikten dolayı, verilen bir problem için en iyi iteratif yöntemin seçilmesi son derece önemlidir. Bu seçim aynı zamanda elektromanyetik problemin formülasyonuna da bağlıdır. Örneğin, manyetik alan integral denklemi (MAİD) (MFIE: magnetic-field integral equation) ve birleşik alan integral denklemi (BAİD) (CFIE: combined-field integral equation) sadece kapalı yüzeylere uygulanabilir ve bu denklemler kullanıldığında pek çok iteratif yöntem hızlı yakınsamalara sahiptir. Ayrıca, bu yakınsamaların basit öniyileştirici teknikler ile daha da hızlandırılması mümkün olmaktadır. Öte yandan, açık yüzeyler için uygulanabilir tek formülasyon olan elektrik alan integral denklemi (EAİD) (EFIE: electric-field integral equation) çözülebilirliği zor olan lineer sistemler oluşturmaktadır. Bu sistemlerin hem iteratif çözümü, hem de öniyileştirilmesi zordur. Bu çalışmada, en-küçük-kareler QR (EKKQR) (LSQR: least-squares QR) yönteminin, EAİD için diğer yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Özellikle büyük ve açık yüzeyli problemlerde, EKKQR yönteminin kullanılmasıyla birlikte çözümün verimi önemli ölçüde artmaktadır. EKKQR yönteminin göreceli yüksek performansının, sistemin eşlenik-bakışımlı (hermitian) yeni sisteme çevirilmesi sayesinde gerçekleştiği gözlemlenmiştir. EKKQR yönteminin gerçekleştirimi için kullanılan ÇSHÇY yöntemiyle birlikte, eşlenik-bakışımlı ÇSHÇY geliştirilmiştir. Böylece, iterasyon sayılarının düşürülmesinin yanında, iterasyonların en verimli biçimde yapılması da sağlanmıştır.

†Bu çalışma, TÜBİTAK (105E172), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

2. İntegral Denklemlerinin En Küçük Kareler Çözümü

Mükemmel iletken cisimlere ait saçılım ve ışınım problemlerinin sayısal çözümleri için EAİD ve MAİD sırasıyla

$$\hat{\boldsymbol{t}} \cdot \int_S d\boldsymbol{r'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) \cdot \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{\nabla\nabla'}{k^2}\right) g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \frac{i}{k\eta} \hat{\boldsymbol{t}} \cdot \boldsymbol{E^i}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

ve

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{n}} \times \int_S d\boldsymbol{r'} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r'}) \times \nabla' g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H^i}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerde, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ bilinmeyen yüzey akımını, $\hat{\boldsymbol{t}}$ ve $\hat{\boldsymbol{n}}$ yüzey üzerindeki teğet ve dik vektörleri, $\boldsymbol{E^i}(\boldsymbol{r})$ ve $\boldsymbol{H^i}(\boldsymbol{r})$ gelen elektrik ve manyetik alanları ve $g(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ boş uzaya ait Green fonksiyonunu ifade etmektedir. Bilinmeyen akımın $\boldsymbol{b}_n(\boldsymbol{r})$ temel fonksiyonlarıyla açılması ve sınır koşullarının $\boldsymbol{t}_m(\boldsymbol{r})$ test fonksiyonlarıyla test edilmesi sayesinde EAİD ve MAİD için

$$\sum_{n=1}^{N} Z_{mn}^{E,M} a_n = v_m^{E,M}, \qquad m = 1, ..., N \tag{3}$$

matris denklemleri elde edilebilir. Bu denklemlerin EKK çözümleri ise

$$\left[\overline{\boldsymbol{Z}}^{E,M}\right]^H \cdot \overline{\boldsymbol{Z}}^{E,M} \cdot \boldsymbol{a} = \left[\overline{\boldsymbol{Z}}^{E,M}\right]^H \cdot \boldsymbol{v}^{E,M} \tag{4}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada H eşlenik çaprazlama işlemini simgelemektedir. İteratif tekniklerin (4)'te verilen denklemlere uygulanmasında normal matris-vektör çarpımlarına ek olarak eşlenik çaprazlanmış matris için de çarpımlar gerekmektedir. Galerkin yönteminin uygulandığı EAİD uygulamalarında orijinal matris simetrik olduğundan eşlenik çaprazlanmış matris-vektör çarpımı kolaylıkla elde edilebilir. Öte yandan, (2)'de verilen MAİD Galerkin yönteminde bile simetrik değildir. Bu yüzden, MAİD ve BAİD'nin ÇSHÇY ile hızlandırılmış iteratif çözümlerinde eşlenik-bakışımlı ÇSHÇY'ye de ihtiyaç duyulmaktadır.

3. Sayısal Örnekler

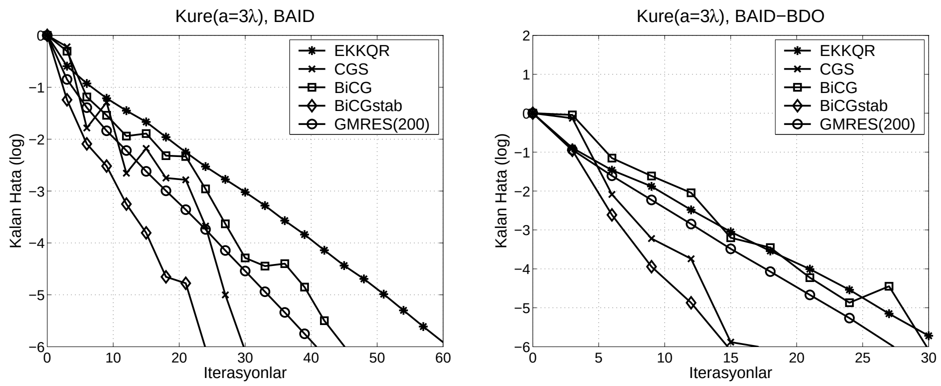
EKKQR, EKK yöntemiyle elde edilen lineer sistemlere CG tekniğinin uygulanmasına denk gelen kararlı bir algoritmadır. Bu yöntemin diğer iteratif tekniklere göre olan verimini ölçmek amacıyla 3λ yarıçapa sahip küre ve değişik boylarda levha geometrilerini içeren saçılım problemleri ele alınmıştır. Küre probleminin BAİD ile formülasyonu ile elde edilen sisteme farklı iteratif tekniklerin uygulanması sonucunda gerçekleştirilen çözümler Şekil 1(a)'da gösterilmiştir. Şekil 1(b)'de ise aynı çözümler blok-diagonal öniyileştirici (BDÖ) (BDP: block-diagonal preconditioner) ile tekrarlanmıştır. Şekil 1'de gösterilen her iki durumda da EKKQR en iyi teknik değildir ve diğer yöntemler, özellikle BiCGStab, çok daha hızlı yakınsamalara sahiptir. Öte yandan, Şekil 2(a)'de gösterildiği gibi, aynı problemin EAİD ile formülasyonunda EKKQR en iyi performansı vermektedir. Ancak, yine de EKKQR'nin EAİD'ye uygulanmasıyla elde edilen yakınsama BAİD için elde edilen yakınsamalara göre çok yavaş kalmaktadır. Bu sonuç kapalı geometrilere ait problemlerin çözümlerinde BAİD'nin kullanılması gerektiği savını desteklemektedir [2].

Açık geometrilere ait problemlerin çözümlerinde EAİD'nin kullanılması zorunludur. Bu bakımdan EKKQR'nin getirdiği avantajlar önemli hale gelmektedir. Şekil 2(b)'de $30\lambda \times 30\lambda$ boyutlarındaki bir levhaya ait saçılım probleminin iteratif çözümleri gösterilmiştir. Diğer iteratif tekniklere göre EKKQR en az iterasyon sayısı ile hedeflenen hata seviyesine inebilmiştir. Değişik boylardaki levha problemlerinin çözümü için iteratif algoritmanın ihtiyaç duyduğu işlem zamanı ve bellek miktarı sırasıyla Şekil 3(a) ve 3(b)'de gösterilmiştir. Şekil 3(a)'da en hızlı yöntem GMRES olsa da, bu yöntemin kullandığı bellek miktarı Şekil 3(b)'de gösterildiği gibi diğer yöntemlere kıyasla çok daha fazladır. Bellek kullanımının sınırlı olduğu durumlarda EKKQR en hızlı yöntem olarak gözükmektedir.

Kaynaklar

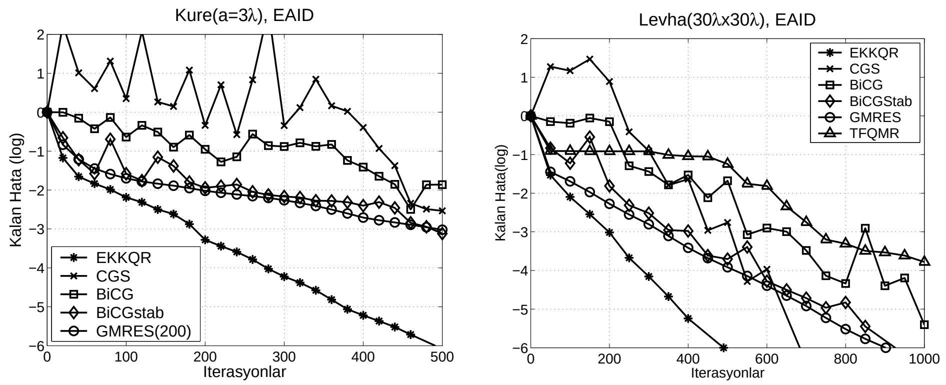
[1] C.-C. Lu ve W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 45, no. 10, s. 1488–1493, Ekim 1997.

[2] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Elektromanyetik saçınım problemlerinde elektrik alan, manyetik alan ve birleşik alan integral denklemleri," *URSI-Türkiye 2002 Bilimsel Kongresi,* İstanbul, Türkiye, s. 158–161, 2002.



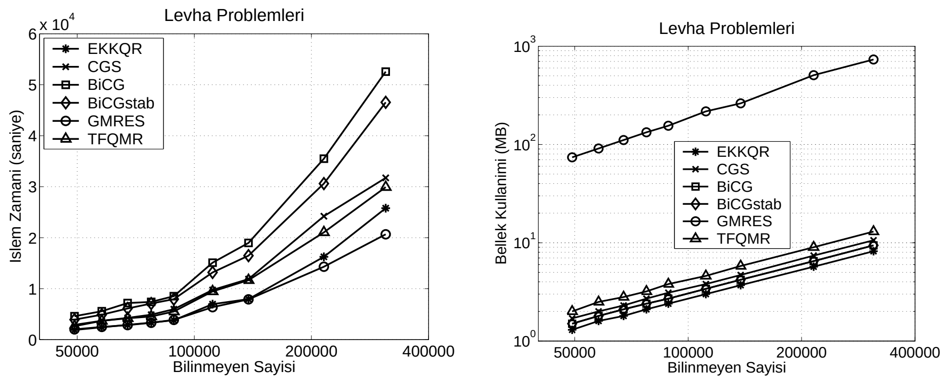
(a) (b)

Şekil 1. Yarıçapı 3λ olan küreye ait saçılım probleminin BAİD ile formülasyonu sonucunda elde edilen (a) öniyileştirici olmadan ve (b) BDÖ ile iteratif çözümleri.



(a) (b)

Şekil 2. (a) Küre probleminin ve (b) $30\lambda \times 30\lambda$ boyutlarında bir levhaya ait saçılım probleminin EAİD ile formülasyonu sonucunda elde edilen iteratif çözümleri.



(a) (b)

Şekil 3. Değişik boylardaki levha problemlerinin çözümü için iteratif algoritmanın ihtiyaç duyduğu (a) işlem zamanı ve (b) bellek miktarı.