

Manyetik Alan İntegral Denkleminde Lineer Temel Fonksiyonların Kullanımı

Özgür Ergül ve Levent Gürel¹
Bilkent Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent, Ankara
lgurel@ee.bilkent.edu.tr

Özet: Üç boyutlu karmaşık geometrilerle ilgili saçılım problemlerinin elektromanyetik benzetim ortamında yapılan çözümlerinde, elektrik alan integral denkleminin (EAİD) farklı olarak manyetik alan integral denkleminin (MAİD) kullanılan temel ve test fonksiyonları üzerine getirdiği koşullar yapılan formülasyonun biçimine bağlıdır. Bu bakımdan türev operatörünün bulunduğu yere göre üç farklı genel formülasyon yapılmış ve bu denklem için hem dolam-uyumlu (curl-conforming), hem de iraksay-uyumlu (divergence-conforming) fonksiyonlar kullanılmıştır. Bu fonksiyonların kullanımıyla hesaplanan akım ve radar kesit alanı (radar cross section: RCS) sonuçları karşılaştırılmış, Rao-Wilton-Glison (RWG) fonksiyonlarının MAİD’de kullanılmasıyla ilgili doğruluk sorunlarının daha yüksek dereceli enine lineer (TL: Transverse lineer) fonksiyonların kullanılmasıyla ortadan kalktığı gösterilmiştir.

1. Giriş

Üç boyutlu karmaşık geometrilerle ilgili saçılım problemlerinde, akımın RWG [1] fonksiyonlarıyla modellendiği momentler metodu (MOM: method of moments) ve hızlı çokkutup yöntemi (FMM: fast multipole method) [2] uygulamalarında MAİD’in kullanılmasıyla elde edilen akım ve RCS sonuçlarının EAİD’in kullanılmasıyla elde edilenlere göre daha yanlış olduğu gösterilmiştir [3]. Yumuşak olmayan, sivri geometrilerin çözümünde çok daha açık bir şekilde ortaya çıkan bu durum, MAİD’in RWG fonksiyonlarından başka lineer fonksiyonlarla birlikte kullanılmasını gündeme getirmiştir. Üç farklı genel formülasyon doğrultusunda oluşturulan uygulamalardan elde edilen bulgular, bu denklemden elde edilen sonuçların doğruluk seviyesinin akımın modellenme biçimine bağlı olarak önemli bir oranda geliştirilebileceğini göstermiştir.

2. MAİD’de Lineer Fonksiyonların Kullanımı

Kapalı ve iletken geometrileri içeren saçılım problemleri için MAİD’in kullanıldığı MOM uygulamalarında empedans matrisi elemanları

$$Z_{mn} = \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) - \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade temel (\mathbf{b}_n) ve test (\mathbf{t}_m) fonksiyonları üzerine herhangi bir kısıtlama getirmediğinden hem dolam-uyumlu hem de iraksay-uyumlu fonksiyonlar için kullanılabilir. Öte yandan türev operatörünün yerinin değiştirilmesiyle aynı ifade

$$\begin{aligned} Z_{mn} = & \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) - \int_{S_m} d\mathbf{r} \left\{ \nabla_s \times [\mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] \right\} \cdot \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ & + \int_{S_m} d\mathbf{r} \nabla_s \cdot \left\{ [\mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \times \hat{\mathbf{n}}] \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \\ & - \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2)$$

¹ Bu çalışma, Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), TÜBİTAK (103E008), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

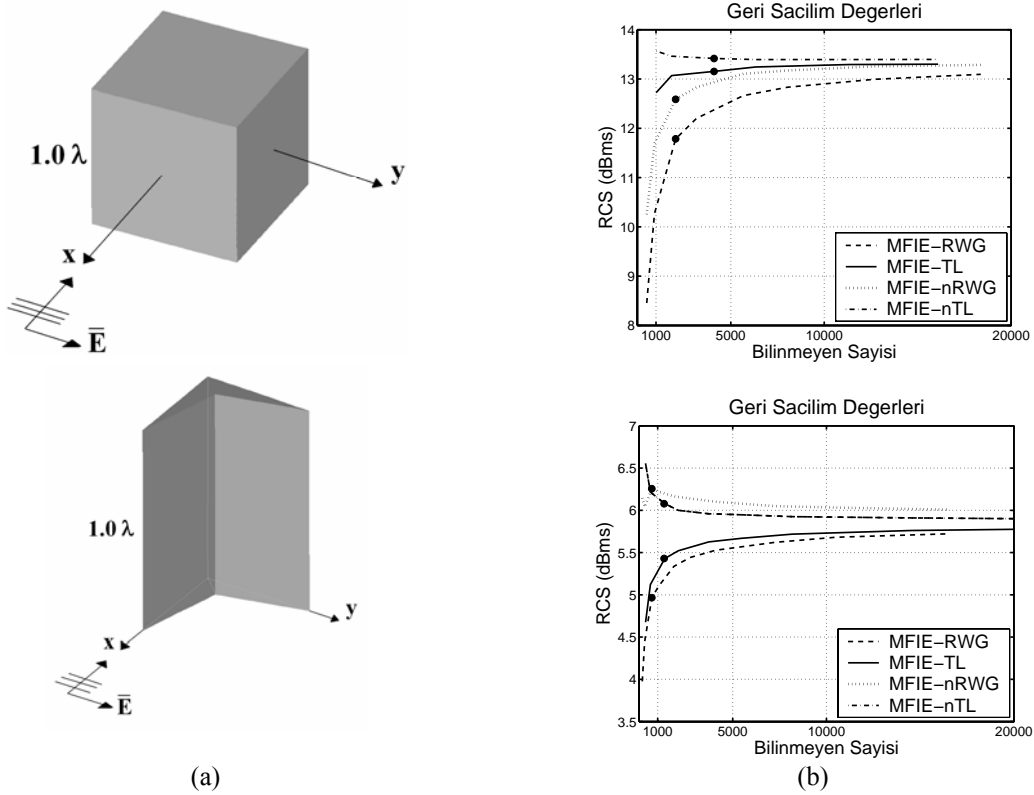
şekline dönüştürülebilir. İç integrallerdeki tekilliğin hafifletildiği bu formülasyonun uygun bir biçimde kullanılabilmesi için test fonksiyonlarının iraksay-uyumlu olması gerekmektedir. Benzer bir şekilde, türev operatörünün temel fonksiyonunun üzerine alınmasıyla

$$\begin{aligned}
Z_{mn} = & \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}_n(\mathbf{r}) - \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{n}}' \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\
& + \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla'_s \times \mathbf{b}_n(\mathbf{r}') \\
& - \int_{S_m} d\mathbf{r} \mathbf{t}_m(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \int_{S_n} d\mathbf{r}' \nabla'_s \times [g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{b}_n(\mathbf{r}')]
\end{aligned} \quad (3)$$

elde edilir ve bu formülasyon dolam-uyumlu temel fonksiyonları için uygundur.

MAİD'in kullanıldığı MOM ve FMM uygulamalarında dört farklı lineer fonksiyon Galerkin yöntemiyle kullanılmıştır. Bunlardan ikisi iraksay-uyumlu RWG ve TL [4] fonksiyonları, diğer ikisi ise bu fonksiyonlardan türetilmiş dolam-uyumlu nRWG ($\hat{\mathbf{n}} \times \text{RWG}$) ve nTL ($\hat{\mathbf{n}} \times \text{TL}$) fonksiyonlarıdır. Iraksay-uyumlu fonksiyonlar için (1) kullanılırken dolam-uyumlular için ise (3) kullanılmış, her iki formülasyonda da iç integrallerdeki tekillikler çıkartılmıştır. Ayrıca verimli bir şekilde uygulanması açısından yakın-alan etkileşimleri için (3)'teki son elemanın iç integrali değiştirilmiş ve doğrusal integrale dönüştürülmüştür.

Dört fonksiyon da üçgenler üzerinde tanımlandığı halde TL ve nTL fonksiyonları RWG ve nRWG'den farklı olarak her kenar üzerinde çiftler halinde bulunurlar. Bu yüzden de bu fonksiyonların kullanıldığı durumlarda problemin bilinmeyen sayısı RWG ve nRWG'ye göre iki katına çıkmaktadır ve uygulamalar daha verimsiz gözükmektedir. Öte yandan, sonuçlarda gösterileceği gibi, bu fonksiyonların kullanılmasıyla çözümlerin doğruluğundaki iyileşmeden elde edilen verim çok daha yüksektir.



Şekil 1. (a) Saçılım problemleri, (b) bilinmeyen sayısına bağlı geri saçılım değerleri.

3. Sonuçlar

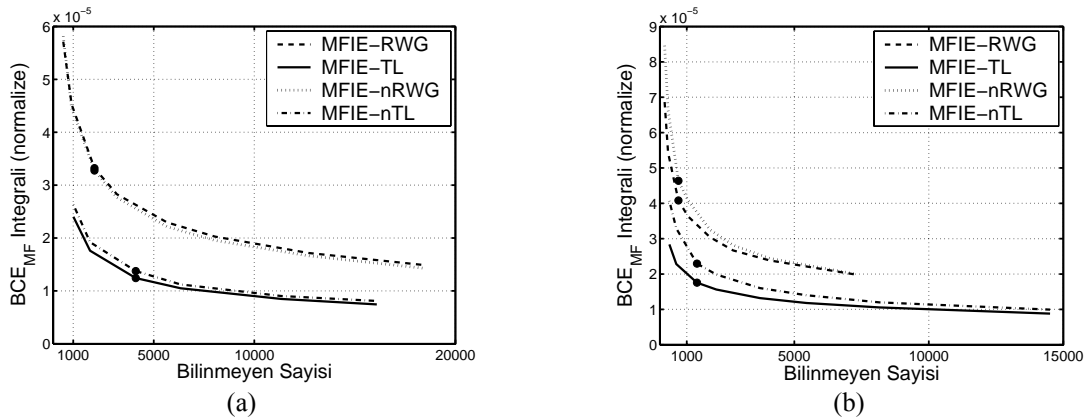
Şekil 1(a)'da sunulan saçılım problemlerinde 1λ boylarında küp ve kanat Őeklindeki iletken kapalı yüzeyler x yönünden gelen ve elektrik alanı polarizasyonu y yönünde olan düzlemsel dalgalar ile aydınlatılmaktadır. Problemler çeŐitli boylarda yapılan genlemeler için çözülmüŐ ve Şekil 1(b)'de gösterilen bilinmeyen sayısına bağlı geri-saçılım (backscatter) değerleri elde edilmiŐtir. $\lambda/10$ genlemenin iŐaretlendiėi bu Őekillerde x eksenin bilinmeyen sayısı olarak alınmasına rağmen yakınsamaların TL ve nTL fonksiyonları için daha hızlı olduğu ve en yavaŐ yakınsamanın RWG fonksiyonuna ait olduğu gzlmektedir.

Uygulamaların doğruluğunun daha iyi anlaŐılabilmesi bakımından sınır koŐulu hatası (BCE: boundary condition error) tanımlanmıŐtır. Yüzey zerindeki herhangi bir noktada manyetik alan ile ilgili BCE Őu Şekilde gösterilebilir:

$$BCE_{MF}(\mathbf{r}) \triangleq \frac{1}{k} \left| \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{sca}(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right| \quad (4)$$

Gelen manyetik alan (\mathbf{H}^{inc}) ile birlikte hesaplanmıŐ olan akımın ve sağılan manyetik alanın (\mathbf{H}^{sca}) kullanıldığı bu tanımın sayesinde manyetik alan ile ilgili sınır koŐullarının ne kadar sağlandığı test edilebilmektedir. Şekil 2(a)'da kp problemi için, Şekil 2(b)'de ise kanat problemi için elde edilen akımlardan hesaplanan BCE'nin yüzey üzerindeki integrali bilinmeyen sayısına göre verilmiŐtir. İntegral sonucunda elde edilen değer geometrinin alanı ile normalize edilmiŐ ve RCS'de yapıldığı gibi $\lambda/10$ genlemeler iŐaretlenmiŐtir. Her iki geometri için de TL ve nTL fonksiyonlarından elde edilen BCE'nin RWG ve nRWG'ye göre alt seviyelerde kaldığı gzlenmekte ve bu fonksiyonların kullanılması durumunda manyetik alanla ilgili sınır koŐullarının daha iyi sağlandığı tespit edilmektedir. Bu da daha önce gösterilen RCS sonuçlarıyla tutarlı gzlmektedir.

MAİD'de lineer fonksiyonların kullanımıyla ilgili çalıŐmalar uygulamaların diğer geometriler için kullanılmasıyla devam etmektedir. İleri aŐamalarda hızlı ve verimli algoritmaların hassas doğruluk kriterleriyle kullanılabilmesi için RWG yerine TL fonksiyonlarıyla akımın modellenmesi gündeme gelmiŐtir.



Şekil 2. (a) Kp probleminde, (b) kanat probleminde BCE'nin yüzey üzerindeki normalize edilmiŐ integrali.

Kaynaklar

- [1] S. M. Rao, D. R. Wilton, ve A. W. Glisson, "Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape," IEEE Trans. Antennas Propagat., cilt AP-30, s. 409-418, Mayıs 1982.
- [2] Coifman R., Rokhlin V., ve Wandzura S., "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription," IEEE Ant. Propag. Mag., cilt 35, no. 3, s. 7-12, Haz. 1993.
- [3] . Ergül ve L. Grel, "RWG fonksiyonlarının manyetik alan integral denkleminde kullanılmasıyla ilgili sorunlar," 2. URSI-Türkiye'2004 Bilimsel Kongresi, Ankara, Türkiye, Eyll 2004.
- [4] L. C. Trintinalia ve H. Ling, "An improved triangular patch basis for the method of moments," 2000 IEEE AP-S Uluslararası Sempozyumu ve URSI Radyo Bilimi Toplantısı, Salt Lake City, UT, cilt. 4, s. 2306-2309, Temmuz 2000.