

Hızlı Çokkutup Yöntemiyle Elektromanyetik Saçınım Problemlerinin Çözümü

Özgür Ergül
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
Ankara
ergul@cem.bilkent.edu.tr

Levent Gürel
Elektronik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
Ankara
lgurel@bilkent.edu.tr

ÖZET

Elektromanyetik saçınım problemlerinde, geometrilerin olabildiğince yüksek frekanslarda modellenebilmeleri arzu edilir. Öte yandan, yükselen frekansla birlikte çözümü gerçekleştirebilmek için, geometrilerin daha çok parçaya bölünmesi gerekmektedir, bu da problemlerdeki bilinmeyen sayısını artırmaktadır. Çok yüksek sayıda bilinmeyenli problemlerde momentler metodu (MOM) gibi yöntemlerin kullanımı zorlaşmakta ve hızlı çokkutup yöntemi (FMM) gibi iteratif çözüme dayalı yöntemlerin kullanımına ihtiyaç duyulmaktadır.

Elektrik alan integral denkleminin (EFIE) kullanıldığı FMM versiyonlarının, bellek kullanımı ve işlem zamanı bakımından MOM versiyonlarına göre çok daha verimli olduğu görülmüştür. Öte yandan, EFIE ile oluşturulan sistemlerin iteratif çözümlere çok uygun olmadığı da bilinmektedir. FMM çözümlerinin daha da geliştirilmesi bakımından, EFIE yerine manyetik alan (MFIE) ve birleşik alan (CFIE) integral denklemlerinin kullanılması daha uygundur. Bu iki denklemin oluşturduğu sistemlerin çözülebilirliği EFIE ile oluşturulan sistemlere göre daha yüksek olduğundan, iteratif çözümlerin daha kısa sürede, daha az bellek kullanımıyla yapılması sağlanabilmekte ve büyük problemlerin daha verimli çözümleri yapılabilmektedir.

1. MOMENTLER METODU

Elektromanyetik saçınım problemlerinde sıkça kullanılan EFIE, mükemmel iletkenler için teğet elektrik alanının yüzey üzerinde sıfırlanmasıyla elde edilir ve şu şekilde gösterilebilir [1]:

$$\hat{t} \cdot \int_S \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{J}(\bar{r}') dS' = \frac{4\pi i}{k\eta} \hat{t} \cdot \bar{E}^{inc}(\bar{r})$$

Bu denklemdeki bilinmeyen olan akım yoğunluğunun yaklaşık olarak bulunabilmesi için MOM uygulanabilir. Bunun için, akım yoğunluğu temel fonksiyonları cinsinden yazılır:

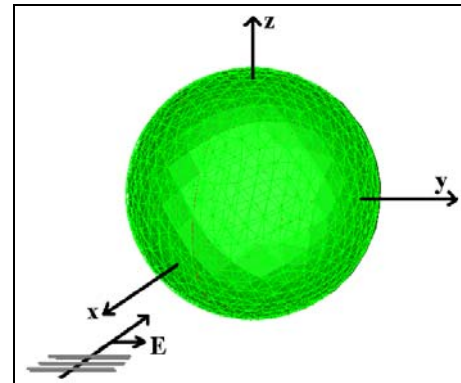
$$\bar{J}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \bar{b}(\bar{r})$$

Test fonksiyonlarının kullanılmasıyla birlikte bir sistem elde edilir ve bu sistemin çözülmesiyle temel fonksiyonlarının çarpanlarının, dolayısıyla akım yoğunluğunun bulunması amaçlanır:

$$\sum_{i=1}^N a_i Z_{ij} = v_i, \quad i = 1 \dots N$$
$$Z_{ij} = \int_{S_i} d\bar{r} \bar{t}_i(\bar{r}) \cdot \int_{S_j} d\bar{r}' \bar{G}(\bar{r}, \bar{r}') \cdot \bar{b}_j(\bar{r}')$$
$$v_i = \frac{4\pi i}{k\eta} \int_{S_i} d\bar{r} \bar{t}_i(\bar{r}) \cdot \bar{E}^{inc}(\bar{r})$$

MOM'un kullanıldığı uygulamalarda bellek kullanımı $O(N^2)$ 'dir ve oluşturulan matrisin N^2 kompleks elemanı bulunmaktadır. Matrisin oluşturulmasında $O(N^2)$ işlem gerekmektedir. Sistemin çözümü ise Gaussian eleme yöntemiyle yapılıyorsa $O(N^3)$, iteratif olarak yapılıyorsa $O(IN^2)$ işlem gerektirmektedir (I = İterasyon sayısı).

İntegral denklemi olarak EFIE kullanan bir MOM uygulamasının küre problemleri üzerinde denemesinde, çözüm için gerekli olan bellek ve işlem zamanları problemin büyüklüğüne bağlı olarak Tablo-1'de gösterilmiştir. Bu problemlerdeki küreler, büyüklükleri dalgaboyunun $1/10$ 'u olan lineer üçgenlerin kullanılmasıyla *mesh*'lenmiş, üzerilerine düzlem dalgalar gönderilmiştir (Şekil-1). MOM'da, temel fonksiyonları RWG [6] olarak seçilmiş ve Galerkin metodu uygulanmış, ayrıca çözüm kısmında Gaussian eleme yöntemi kullanılmıştır.



Şekil 1. Küre problemi

Tablo 1. MOM-EFIE uygulamasında işlem zamanı ve bellek kullanımı.

Kürenin Yarıçapı	Bilinmeyen Sayısı	İşlem Zamanı	Bellek Kullanımı
0.5λ	930	103 sn	14 MB
0.6λ	1302	210 sn	27 MB
0.75λ	2076	567 sn	68 MB
1.0λ	3723	2211 sn	217 MB
1.5λ	8364	20511 sn	1018 MB

Tabloda görüldüğü üzere, problemdeki bilinmeyen sayısının artmasıyla işlem zamanı ve bellek kullanımı süratli bir şekilde artmakta ve uygulamanın daha büyük problemler için kullanılması güç gözükmektedir.

2. HIZLI ÇOKKUTUP YÖNTEMİ

MOM ile oluşturulan matrisin her bir elemanı için ayrı bir hesaplama gerekirken, yani bir test fonksiyonu ile bir temel fonksiyonunun etkileşiminin tek başına incelenmesi gerekmektedir. Elde edilen sistemin iteratif bir metotla çözülmesi durumunda matrisin çeşitli vektörlerle çarpılması gerekmektedir ve her bir çarpım N^2 işlemle yapılmaktadır.

FMM ise iteratif çözüme dayalı bir yöntemdir ve bu yöntemde matris-vektör çarpımları N^2 yerine $N^{3/2}$ işlemle yapılabilmektedir. Ayrıca çarpım işlemlerini yapabilmek için matrisin tamamı doldurulmamakta ve bellek kullanımı da $O(N^{3/2})$ 'e düşmektedir [2].

Bunun için, problemdeki temel ve test fonksiyonları buldukları yerlere göre gruplandırılır ve bu grupların birbirleriyle etkileşimi incelenir. Sadece birbirlerine yakın olan temel ve test fonksiyonlarının etkileşimleri MOM'daki gibi hesaplanır ve bellekte tutulur. Birbirlerine uzak olan temel ve test fonksiyonlarının etkileşimlerinde gruplandırmadan faydalanılır. Çözüm iteratif olarak yapıldığından, uzak etkileşimlerin bellekte tutulmasına da gerek yoktur.

EFIE'nin kullanıldığı FMM versiyonlarında iteratif metotların çok iyi çalışmadığı gözlemlenmiş, çözümü kolaylaştırmak için kullanılan *preconditioner*'in çok elemanlı olmaları gerektiği ve fazla bellek kullanmaları gerektiği anlaşılmıştır. Filtreleme yöntemiyle elde edilen *preconditioner*'ların kullanıldığı bir FMM versiyonunun küre problemleri üzerinde uygulanmasında, gerekli olan bellek ve işlem zamanı Tablo-2'de gösterilmiştir.

Tablo 2. FMM-EFIE uygulamasında işlem zamanı ve bellek kullanımı.

Kürenin Yarıçapı	Toplam İşlem Zamanı	Çözüm Zamanı	Bellek Kullanımı
0.5λ	40 sn	9 sn	26 MB
0.6λ	89 sn	37 sn	39 MB
0.75λ	182 sn	62 sn	74 MB
1.0λ	510 sn	167 sn	141 MB
1.5λ	2834 sn	1315 sn	580 MB

Tablo-1 ile Tablo-2'nin karşılaştırılmasından da anlaşılacağı gibi, bilinmeyen sayısının büyümesiyle FMM uygulaması hem işlem zamanı açısından hem de

bellek kullanımı açısından MOM uygulamasına göre daha verimli olmaktadır.

3. MANYETİK ALAN VE BİRLEŞİK ALAN İNTEGRAL DENKLEMLERİ

MFIE, mükemmel iletken kapalı yüzeyler için şu şekilde gösterilebilir:

$$\Omega_0 \hat{t} \cdot \bar{J}(\bar{r}) - \hat{t} \cdot \hat{n} \times \nabla \times \int_S dS' g(\bar{r}, \bar{r}') \bar{J}'(\bar{r}') = 4\pi \hat{t} \cdot \hat{n} \times \bar{H}^{inc}(\bar{r})$$

EFIE'ye yapıldığı gibi bu denkleme de MOM uygulanabilmektedir [3]. CFIE ise iki denklemin lineer olarak toplanmasıyla oluşturulur:

$$CFIE = \alpha EFIE + (1 - \alpha) MFIE, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

CFIE ve MFIE'nin kullanılmasıyla elde edilen sistemlerin çözülebilirliğinin EFIE ile elde edilenlere göre daha yüksek olduğu gözlemlenmiştir. İteratif metotların daha verimli çalışması bakımından CFIE ve MFIE'nin kullanılması önemlidir. Öte yandan MFIE'nin bazı iç rezonans problemlerinden etkilendiği ve kimi frekanslarda yanlış akım ve radar kesit alanı (RCS) değerleri verebildiği bilinmektedir [4,5]. Bu bakımdan, bu integral denkleminin doğrudan kullanılması sakıncalı gözükmektedir.

CFIE ile oluşturulan sistemlerin daha çözülebilir olmasından dolayı, bu denklemin kullanıldığı versiyonda blok-diyagonal gibi az bellek kullanan *preconditioner*'ların kullanılması mümkün olmaktadır. CFIE kullanan bir FMM uygulamasına ait işlem zamanı ve bellek kullanımı değerleri Tablo-3'te gösterilmiştir. Bu uygulamadaki iteratif çözümün blok-diyagonal *preconditioner* kullanması sağlanmıştır.

Tablo 3. FMM-CFIE uygulamasında işlem zamanı ve bellek kullanımı.

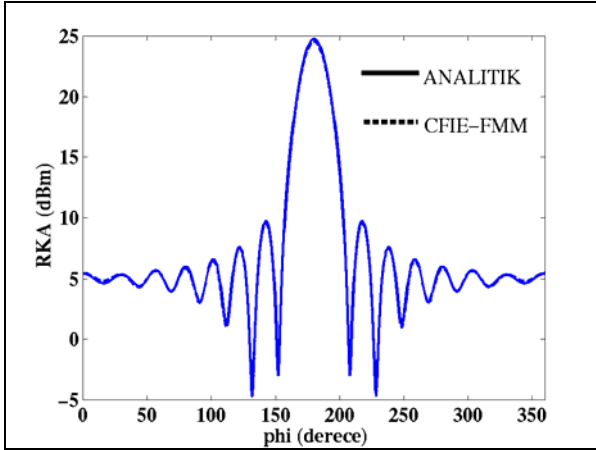
Kürenin Yarıçapı	Toplam İşlem Zamanı	Çözüm Zamanı	Bellek Kullanımı
0.5λ	62 sn	5 sn	23 MB
0.6λ	102 sn	8 sn	33 MB
0.75λ	238 sn	20 sn	55 MB
1.0λ	666 sn	31 sn	106 MB
1.5λ	1980 sn	90 sn	273 MB

Tablo-2 ve Tablo-3'ün karşılaştırılmasından da görülebileceği gibi, CFIE kullanan FMM uygulaması EFIE kullanan FMM uygulamasına göre daha az bellek kullanmakta ve büyük problemlere gidildikçe bellek kullanımındaki fark belirginleşmektedir.

Öte yandan, ilk dört problemdeki işlem zamanlarına bakıldığında EFIE versiyonunun daha kısa sürede sonuca ulaştığı görülmektedir. Bunun nedeni, MOM'daki gibi yapılacak olan yakın alan işlemleridir. Anlaşılacağı gibi, CFIE versiyonunda bu işlemlerin miktarı EFIE'deki işlemlerin miktarının iki katıdır. Öte yandan, bilinmeyen sayısı arttıkça ve problem büyüdükçe, EFIE'deki çözüm için gereken süre,

toplam sürenin en önemli kısmını oluşturmaya başlamaktadır. Öyle ki, çözüm süresinde yapılabilecek bir kısaltma son derece önemli bir hale gelmektedir. Böylece 5. problemdeki gibi, CFIE'nin kullanılması ile toplam sürenin kısaltılması mümkün olur ve işlem zamanı bakımından da CFIE versiyonu daha verimli hale gelir.

Şekil-2'de, 1.5λ yarıçapına sahip küre için, CFIE kullanan FMM uygulamasıyla elde edilen radar kesit alanı değerleri analitik değerlerle birlikte gösterilmiştir. Uygulamanın doğruluğu dikkat çekicidir.



Şekil 2. Radar kesit alanı değerleri.

3. SONUÇ

Hızlı çokkutup yöntemi, elektromanyetik saçınım problemlerindeki bellek kullanımı ve işlem zamanının bilinmeyen sayısına bağlı artışını yavaşlatmak için kullanılabilir önemli bir metottur. Öte yandan, problem büyüdükçe, kullanılan integral denkleminin de önemi artmakta ve elde edilen sistemlerin çözülebilirliği önem kazanmaktadır. EFIE yerine CFIE'nin kullanılmasının hem bellek kullanımını, hem de işlem zamanını azalttığı gözlemlendiğinden, böyle bir değişikliğin yapılması kaçınılmazdır.

4. KAYNAKLAR

[1] Chew, W.C., J.-M. Jin, E. Michielssen, and J. Song, Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics, Artech House, 2001.

[2] Coifman R., V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The Fast Multipole Method For the Wave Equation", *IEEE Ant. Propag. Mag.*, Cilt. 35, 1993, pp. 7-12.

[3] Hodges, R.E., and Y. Rahmat-Samii, "The Evaluation of MFIE Integrals With the Use of Vector Triangle Basis Functions", *Microwave Opt. Technol. Lett.*, Cilt. 14, 1997, pp. 9-14.

[4] Mautz, J. R., and R.F. Harrington, "H-field, E-field, and Combined Field Solutions For Conducting Bodies of Revolution", *A.E.U.*, Cilt. 32, 1978, pp. 159-164.

[5] Peterson, A. F., S. L. Ray, and R. Mittra, Computational Methods For Electromagnetics, IEEE Press, 1998.

[6] Rao, S. M., D. R. Wilton, and A.W. Glisson, "Electromagnetic Scattering By Surfaces of Arbitrary Shape", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Cilt: 30, 1982, pp. 409-418.