

Elektromanyetik Saçınım Problemlerinde Elektrik Alan, Manyetik Alan ve Birleşik Alan İntegral Denklemleri

Özgür Ergül ve Levent Gürel
Bilkent Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent, Ankara
lgurel@bilkent.edu.tr

Özet: Kapalı geometrilere sahip iletkenlerin elektromanyetik benzetim ortamında çözülmesinde elektrik alan integral denkleminin kullanılması, bazı iç rezonans problemleri nedeniyle yeterince verimli olmayabilir. Kimi durumlarda, bu denklemin kullanılmasıyla elde edilen sistemlerin çözülebilirliğinin düşük olduğu ve elde edilen çözümün yanlış olabildiği gözlemlenebilir. Çözülebilirliği çok daha yüksek sistemler oluşturabilen manyetik alan integral denkleminin de iç rezonans problemlerinden fazlasıyla etkilendiği ve çok daha yanlış sonuçlar verebildiği bilinmektedir. İki denklemin birleştirilmesiyle oluşturulan birleşik alan integral denklemi ise, hem iç rezonans problemlerinden etkilenmez, hem de çözülebilirliği yüksek sistemler oluşturabilir [1]. Diğer iki denkleme göre, birleşik alan integral denkleminin çok daha verimli olduğu ve güvenilir sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

1. İntegral Denklemlerinde İç Rezonans Problemi

Elektromanyetik saçınım problemlerinde sıkça kullanılan elektrik alan integral denklemi, iletkenler üzerindeki elektrik alanının teğet bileşeni olmadığı gerçeği kullanılarak elde edilir ve şu şekilde gösterilebilir [2]:

$$\hat{t} \cdot \int_S \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') dS' = \frac{4\pi i}{k\eta} \hat{t} \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

Formülün her iki tarafındaki \hat{t} , S yüzeyi üzerinde herhangi bir teğet vektördür ve gözlem noktasını simgeleyen \mathbf{r}' 'nin yüzey üzerinde olduğu düşünülmüştür. $\bar{\mathbf{G}}$ ise,

$$\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \right) \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{k^2} \nabla \nabla' \right) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2)$$

olarak tanımlanabilir. Açık ve kapalı geometrilere uygulanabilen bu denklemin sol tarafındaki yüzey integrali, indüklenen akım sayesinde oluşan elektrik alanını ifade etmektedir. İntegralin içindeki \mathbf{J} ise, iletken üzerindeki akım yoğunluğu olup, denklemin bilinmeyenidir ve momentler metodu gibi uygulamaların kullanılmasıyla sayısal olarak hesaplanabilir. Öte yandan, denklemin sadece yüzey üzerindeki teğet elektrik alanının test edilmesiyle oluşturulmuş olması, kapalı geometriler içeren saçınım problemleri söz konusu olduğunda, bazı sorunlara neden olabilmektedir. Bunun temel sebebi, problemin çözümünün çalışılan frekansa bağlı olarak özebir (*unique*) olmayabilmesi ve geometriler içinde bazı elektromanyetik alanların denklemin bozmadan tanımlanabilmesidir. Gerçekte var olmayan bu alanların her geometri için farklı olan rezonans frekanslarında probleme karışması, denklemin çözümünü engellemediği halde hatalı akımların bulunmasına neden olabilmektedir.

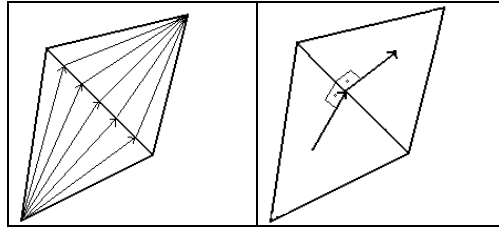
Elektrik alan integral denkleminin bulunan akımların uzak alan ışınımını elde etmek için kullanılması, yukarıda bahsedilen hataların doğrudan taşınması anlamına gelmemektedir. Çünkü, rezonans akımları ışınım yapamamaktadırlar ve bu yüzden de uzak alan ışınım değerlerine herhangi bir katkıda bulunamazlar. Böylece,

uzak alan ışınımları, sadece gerçek akımların etkisiyle hesaplanır ve teorik olarak hatasız bulunabilirler. Öte yandan, elektrik alan integral denklemi kullanılarak elde edilen sistemlerin çözülebilirliği, rezonans frekanslarında ve yakınlarında son derece düşüktür. Bu ikinci olumsuzluk yüzünden, uzak alan ışınımları da, tıpkı akımlar gibi, gerçek değerlerinden sapmış olabilmektedirler.

Manyetik alan integral denklemi, iletkenler üzerine gelen manyetik alanla, akımlarca oluşturulan manyetik alanın teğet bileşiklerinin yüzeyler üzerindeki ilişkisiyle oluşturulur [2]:

$$\Omega_0 \hat{t} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \hat{t} \cdot \hat{n} \times \nabla \times \int_S dS' g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 4\pi \hat{t} \cdot \hat{n} \times \mathbf{H}^{inc}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

Sadece kapalı yüzeyler için tanımlanabilen bu denklemde, gözlem noktasının (\mathbf{r}) yüzeye dışarıdan yaklaştığı düşünülmüştür. Sağ tarafta bulunan Ω_0 , yüzeyin gözlem noktasında sahip olduğu dış uzay açısıdır ve değeri kenar ya da köşe noktaları dışında 2π 'dir [3]. Bu denklemin çözümü de, elektrik alan integral denkleminde olduğu gibi bazı frekanslarda özbebir (*unique*) değildir ve bu frekanslar civarında elde edilen akımlar yanlış olabilmektedir. Bunun yanında, manyetik alan integral denkleminde çözüme karışan dahili alanlar, elektrik alan integral denkleminde oluşanlardan farklı olarak ışınım özelliği gösterebilmektedirler. Böylece, elde edilen uzak alan ışınım değerleri rezonans frekansları civarında kesin olarak yanlıştır ve değerlerdeki hatalar elektrik alan integral denkleminde çözümlerinde görülenlerden çok daha büyüktür. Saçınım problemlerinde, manyetik alan integral denklemini kullanmak gereksiz gibi gözükse de, bu denklemin kullanılmasıyla elde edilen sistemlerin çözülebilirliğinin çok yüksek olması da dikkat çekicidir.



Şekil 1. Manyetik alan integral denkleminin uygulamasında kullanılan temel (RWG) ve test fonksiyonları (noktasal).

2. Manyetik Alan İntegral Denklemi Uygulaması

Momentler metodu, Şekil 1'de gösterilen test (noktasal) ve temel (RWG) fonksiyonları kullanılarak, manyetik alan integral denklemi üzerine kolaylıkla uygulanmıştır. Lineer üçgenler kullanılarak modelleri oluşturulan geometrilerin üzerindeki akımlar RWG fonksiyonları cinsinden yazılmış ve problemlerin bilinmeyen bu fonksiyonların katsayıları (a_i) haline dönüştürülmüştür:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{b}_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{l_i}{2A_i} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (4)$$

Gözlem ve kaynak noktalarının birbirine çok yakın ya da aynı yerde bulunması durumunda Green fonksiyonun çok yüksek değerler vermesinden dolayı çıkabilecek sayısal problemler, test fonksiyonunun üçgen kenarlarına dik seçilmesiyle engellenmiştir. Böyle bir seçimde, manyetik alanların kenarlara paralel, akımın ise kenarlara dik bileşimleri kullanıldığından ve elektrik akımlarının buldukları düzlem içinde manyetik alan oluşturmadıkları bilindiğinden [4], [5], aynı üçgenin farklı kenarlarına denk gelen basis ve test fonksiyonları için hesaplamalar yapılmamıştır. Oluşturulan sistem $\bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v}$ olarak düşünüldüğünde, matris ve sağ taraf vektörü elemanları

$$\mathbf{C}_{ij} = \begin{cases} -\frac{l_j}{2A_j} \hat{e}_i \cdot \int d\mathbf{r}' (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \nabla (g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) & , i \neq j \\ 4\pi - 2\Omega_i & , i = j \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_i = 4\pi\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{H}_i^{inc} \quad (7)$$

olarak türetilmiştir.

3. Birleşik Alan İntegral Denklemi

Manyetik alan ve elektrik alan integral denklemlerinin lineer olarak toplanmasıyla elde edilen birleşik alan integral denkleminin, iç rezonans problemlerinden etkilenmediği ve her frekansta özbebir (*unique*) çözüme sahip olduğu bilinmektedir [1]-[6]. Bu denklemin kullanılmasıyla elde edilen sistemlerin çözülebilirliği de son derece yüksektir. Bu bağlamda, bir önceki bölümde bahsedilen manyetik alan integral denklemi uygulamasıyla, RWG fonksiyonlarını ve *Galerkin* metodunu kullanan bir elektrik alan integral denklemi uygulaması birleştirilmiş ve birleşik alan integral denklemi uygulaması elde edilmiştir. Bu birleştirme işlemi doğrudan yapılmamış, iki sistemin farklı test fonksiyonları kullanmaları sebebiyle aralarında oluşan büyük sayısal farklar, uygun katsayılar kullanılarak ortadan kaldırılmıştır. Böylece, birleşme öncesinde iki sistemin benzer güçte olmaları sağlanmıştır.

Bunlara ek olarak elektrik ve manyetik alan integral denklemlerinin toplam sisteme aynı oranda katkı yapmaları da zorunlu değildir. Birleşik alan integral denklemi

$$BAID = \alpha EAID + (1 - \alpha) MAID \quad (8)$$

olarak gösterilirse, α 'nın 0-1 aralığında herhangi bir değer alması mümkündür. Öte yandan, oluşan sistemin çözülebilirliği söz konusu olduğunda, α 'nın 0.2 olarak seçilmesinin en iyi sonucu verdiği bilinmektedir [1], [2]. Ayrıca, 0.2'den yüksek seçimler için kimi problemlerde çözülebilirliğin çok düştüğü ve bu çözümlerde ufak da olsa hataların belirdiği gözlemlenmiştir.

4. Elektromanyetik Benzetim Ortamında İntegral Denklemlerinin Denenmesi

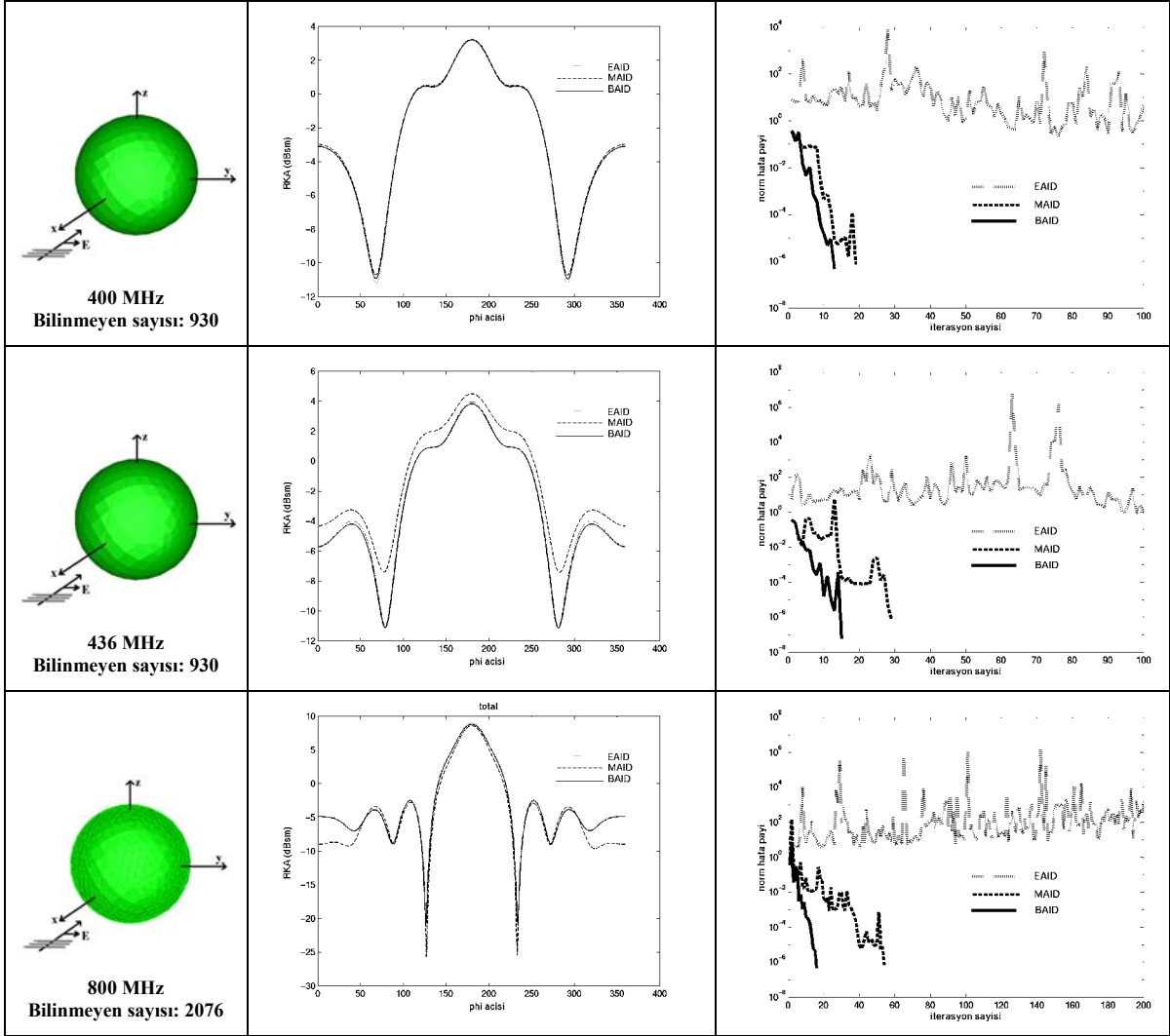
Elektromanyetik benzetim ortamındaki çalışmalar için, üç integral denklemini de kullanabilen hızlı çokkutup yöntemi (*Fast Multipole Method: FMM*) [2] versiyonları geliştirilmiştir. Yapılan çözümlerde iteratif metotlar (*Conjugate Gradient Square: CGS*) kullanılmış, bu metotlardan elde edilen sonuçlardaki hata payı 0.001 veya daha az olarak ayarlanmıştır. Denklemlerde geçen yüzey integrallerinin ise 0.01 hata payı ile hesaplanması sağlanmıştır. Manyetik, elektrik ve birleşik alan integrallerinin kullanıldığı programlarca hesaplanan akımlar, yüzeyler üzerindeki akımları kullanarak uzak alan ışınımını hesaplayan başka bir programa aktarılmış ve çeşitli geometriler için radar kesit alanı değerleri bulunmuştur.

Yapılan çözümlerden üç tanesi Şekil 2'de gösterilmiştir. 0.3 m yarıçaplı küre geometrisinin kullanıldığı bu problemlerde, iletkenlerin üzerine +x yönünden, y polarizasyonuna sahip düzlem dalgalar gönderilmiş, x-y düzlemi içindeki radar kesit alanı değerleri çeşitli açılar için elde edilmiştir. İkinci sütunda gösterilen grafiklerden de anlaşılacağı gibi, birleşik ve elektrik alan integral denklemleri üç frekansta da birbirleriyle tutarlı sonuçlar vermişlerdir. Öte yandan, manyetik alan integral denkleminin, 436 MHz ve 800 MHz'te hatalı sonuçlar verdiği görülmektedir.

Üçüncü sütunda bulunan grafiklerde gösterildiği gibi, birleşik alan integral denkleminin kullanıldığı çözümlerde sonuca daha kolay ulaşılmıştır. Bu çözümlerde, iteratif metotlar için oldukça az bellek gereksinimi duyan blok köşegen tipi *preconditioner*'lerin kullanılmasından dolayı, elektrik alan integral denklemi yeterince verimli çalışmamış ve sonuca ulaşmak için yüksek sayıda iterasyona ihtiyaç duymuştur. Bu denklemin kullanıldığı çözümlerde, daha iyi *preconditioner*'lerin kullanılması, sonuca ulaşma hızını arttıracaktır. Öte yandan, bu tür kullanımlar, bellek ihtiyacını yükselteceklerinden, pek tercih edilmemektedirler.

5. Sonuç

Kapalı geometrilerle sahip iletkenlerin elektromanyetik benzetim ortamında yapılan çözümlerinde, birleşik alan integral denkleminin, manyetik ve elektrik alan integral denklemlerine göre çok daha üstün olduğu gözlemlenmiştir. Öncelikle, birleşik alan integral denkleminin kullanıldığı çözümlerde, iteratif metotların çok az bellek kullanan *preconditioner*'lerin kullanılması durumunda bile iyi çalıştığı görülmüştür. Ayrıca, bu denklemin kullanılmasıyla elde edilen uzak alan ışınım değerlerinde, manyetik alan integral denkleminde elde edilenlerdeki gibi hataların bulunmadığı da gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, yüksek frekanslarda çözümlere ihtiyaç duyuldukları ve elektromanyetik saçınım problemlerindeki bilinmeyen sayıları arttıkça, birleşik alan integral denkleminin kullanımının zorunlu bir ihtiyaç haline geldiği anlaşılmıştır.



Şekil 2. Elektromanyetik benzetim ortamında, küre geometrisi üzerinde, birleşik, elektrik ve manyetik alan integral denklemlerinin karşılaştırılması. (Kürenin rezonans frekansları 437, 917, 963 MHz... şeklindedir.)

6. Kaynaklar

- [1] J. R. Mautz ve R. F. Harrington, "H-field, E-field, and combined field solutions for conducting bodies of revolution," *A.E.U.*, vol. 32, s.159-164, Nisan 1978.
- [2] W. C. Chew, J.-M. Jin, E. Michielssen, ve J. Song, eds., *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Boston, Artech House, 2001.
- [3] J. M. Rius, E. Ubeda, ve J. Parron, "On the testing of the magnetic field integral equation with RWG basis functions in method of moments," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 49, s. 1550-1553, 2001.
- [4] R. E. Hodges ve Y. Rahmat-Samii, "The evaluation of MFIE integrals with the use of vector triangle basis functions," *Microwave Opt. Technol. Lett.*, vol. 14, s. 9-14, 1997.
- [5] A. F. Peterson, S. L. Ray, ve R. Mittra, *Computational Methods for Electromagnetics*. New York, IEEE Press, 1998.
- [6] B. Shanker, A. A. Ergin, K. Aygün, ve E. Michielssen, "Analysis of transient electromagnetic scattering from closed surfaces using a combined field integral equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 48, s. 1064-1074, 2000.