

Büyük Diyelektrik Cisimlere Ait Elektromanyetik Saçılım Problemlerinin Çok Seviyeli Hızlı Çokkutup Algoritmasıyla Çözümü[†]

Özgür Ergül^{1,2} ve Levent Gürel^{1,2}

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

²Bilişimsel Elektromanyetik Araştırma Merkezi (BiLCEM)

Bilkent Üniversitesi

TR-06800, Bilkent, Ankara

E-posta: {ergul,lgurel}@ee.bilkent.edu.tr

Özet: Bu çalışmada, çok büyük homojen diyelektrik ve diyelektrik-metalik cisimlere ait elektromanyetik saçılım problemlerinin hızlı ve yüksek doğrulukta çözümleri amaçlanmıştır. Problemlerin formülasyonları elektrik ve manyetik akımı birleşik alan integral denklemi (EMABAİD) ile gerçekleştirilmiştir. Yüksek doğrulukta çözümler için yüzeyler dalga boyuna göre küçük üçgenlerin kullanılmasıyla ayrıştırılmıştır. Yüzeyler üzerinde tanımlanan elektrik ve manyetik akımları Rao-Wilton-Glisson fonksiyonlarıyla açılmıştır. Sınır koşullarının test edilmesiyle oluşturulan yoğun matris denklemleri çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) ile iteratif olarak çözülmüştür. Ayrıca, blok-diyagonal öniyleştiricilerle iteratif yakınsamalar hızlandırılmıştır. EMABAİD, ÇSHÇY, iteratif yöntemler ve öniyleştiricilerin kullanılmasıyla geliştirilen benzetim ortamı sayesinde, milyonlarca bilinmeyenli saçılım problemlerinin yüksek doğrulukta çözümleri gerçekleştirilmiştir.

1. Giriş

Elektromanyetik saçılım problemlerinin çözümünde yüzey integral denklemleri sıkça kullanılmaktadır. Metalik yüzeyler için elektrik alan integral denklemi (EAİD), manyetik alan integral denklemi (MAİD) ve birleşik alan integral denklemi (BAİD) başlıca yüzey formülasyonlarından [1]. Homojen diyelektrik cisimler için ise literatürde pek çok seçenek mevcuttur. Bunlardan Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai (PMCHWT) ve Müller formülasyonları yıllardır çeşitli saçılım ve ışınım probleminin çözümünde kullanılmıştır [1],[2]. Son yıllarda, çözümlerin doğruluğunu ve verimini daha da artırmak amacıyla yeni formülasyonlar da türetilmiştir. Bunlardan, elektrik ve manyetik akımı birleşik alan integral denkleminin (EMABAİD) [3], özellikle büyük problemlere gidildikçe, diğer yüzey formülasyonlarına göre daha üstün olduğu gösterilmiştir [4]. EMABAİD'den elde edilen matris denklemleri, diğer formülasyonlardan elde edilenlere göre daha az iterasyonla çözülebilmektedir. Üstelik EMABAİD, diğer verimli formülasyonlardan çok daha doğru çözümler sunmaktadır. EMABAİD aynı zamanda hem metalik, hem de diyelektrik parçaları olan bileşik cisimler üzerinde kolaylıkla uygulanabilmektedir. Bu çalışmada da, çok büyük diyelektrik ve bileşik cisimlere ait saçılım problemlerinin etkin çözümleri için EMABAİD kullanılmıştır.

Elektromanyetik problemlerinin yüksek doğrulukta çözümleri için yüzey integral denklemlerinin küçük elemanlarla (örneğin, $\lambda/10$ üçgenlerle) ayrıştırılmaları gerekmektedir. Bu doğrultuda, dalga boyuna göre çok büyük cisimlerin çözümlerinde milyonlarca bilinmeyenli matris denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin iteratif yöntemlerle çözümlerinde ihtiyaç duyulan matris-vektör çarpımları çok seviyeli hızlı çokkutup yöntemi (ÇSHÇY) [5] ile hızlı ve verimli bir biçimde gerçekleştirilebilir. Bu yöntem sayesinde, matris-vektör çarpımlarının karmaşıklığı, sonuçların hassasiyetinden ödün vermeden, $\mathcal{O}(N^2)$ 'den $\mathcal{O}(N \log N)$ 'ye düşürülebilmektedir. Öte yandan, verimli çözümler için ÇSHÇY tek başına yeterli değildir. Hızlı matris-vektör çarpımlarına ek olarak, iterasyon sayılarının da düşük seviyelerde tutulması gerekmektedir. Genel olarak, EMABAİD'den elde edilen matris denklemlerinin çözülebilirliği yüksektir. Ancak, problem boyunun büyümesi ve bilinmeyen sayısının artmasıyla birlikte çözümler zorlaşmaktadır. İteratif yakınsamaları hızlandırmak amacıyla çeşitli öniyleştirici tekniklerden faydalanılabilir. Bu çalışmada, EMABAİD'nin çözümleri için özel olarak geliştirilen dört parçalı blok-diyagonal öniyleştiriciler (4PBDÖ) kullanılmıştır. EMABAİD, iteratif yöntemler, ÇSHÇY ve 4PBDÖ'nün

[†]Bu çalışma, TÜBİTAK (105E065, 105E172 ve 107E136), Türkiye Bilimler Akademisi (LG/TÜBA-GEBİP/2002-1-12), ASELSAN ve SSM tarafından desteklenmektedir.

kullanılmasıyla oluşturulan yüksek kabiliyetli benzetim ortamı sayesinde, çok büyük diyelektrik cisimlere ait saçılım problemlerinin çözümleri mümkün hale gelmektedir.

2. Elektrik ve Manyetik Akımı Birleşik Alan İntegral Denklemi

EMABAİD'nin Rao-Wilton-Glisson (RWG) fonksiyonlarıyla ayrıklaştırılması sonucunda $(N+N_D) \times (N+N_D)$ boyutlarında yoğun matris denklemleri elde edilir. Burada N , yüzeyler üzerinde tanımlanan RWG fonksiyonlarının sayısıdır. İlk $N_D \leq N$ RWG fonksiyonu diyelektrik yüzeyler üzerinde tanımlanır ve bu yüzeyler üzerindeki eşdeğer elektrik ve manyetik akımlarını modellemek için kullanılır. Geri kalan $(N - N_D)$ RWG fonksiyonu ise (varsa) metalik yüzeyler üzerindeki elektrik akımını modellemek için kullanılır. RWG fonksiyonları arasındaki etkileşimlerin hesaplanmasıyla birlikte elde edilen yoğun matris denklemleri

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{N \times N}^{(11)} & \bar{\mathbf{Z}}_{N \times N_D}^{(12)} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{N_D \times N}^{(21)} & \bar{\mathbf{Z}}_{N_D \times N_D}^{(22)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^{(1)} \\ \mathbf{v}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (1)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, $\mathbf{a}^{(1)}$ ve $\mathbf{a}^{(2)}$ sırasıyla elektrik ve manyetik akımlarının modellenmesinde kullanılan bilinmeyen katsayıları içeren vektörlerdir.

3. EMABAİD'nin ÇSHÇY ile Çözümü

EMABAİD'den elde edilen matris denklemleri ÇSHÇY ile verimli bir biçimde çözülebilir. Bu çözümler genel olarak şu şekilde özetlenebilir:

- 1) Cismin özylenelemeli olarak parçalara bölünmesiyle, her bir diyelektrik ortam için ayrı bir ağaç yapısı ortaya çıkar. Demetleme, öteleme ve dağıtma gibi ÇSHÇY aşamalarının bu ağaç yapıları üzerinde ayrı ayrı uygulanmaları gerekmektedir.
- 2) Demetleme aşamasında elektrik ve manyetik akımlarından ışılan elektromanyetik dalgalar hesaplanır. Bir diyelektrik ortamdaki elektromanyetik alanlara sadece ortamı sınırlayan yüzeyler üzerindeki eşdeğer akımlar katkıda bulunur.
- 3) Öteleme aşamasında ışınlar gelen dalgalara çevrilir.
- 4) Dağıtma aşamasında gelen dalgalar özylenelemeli olarak toplanır ve RWG fonksiyonları tarafından alınır. Sadece diyelektrik ortamı sınırlayan yüzeyler üzerindeki RWG fonksiyonları gelen dalgaları test etmek için kullanılır.

ÇSHÇY sayesinde matris-vektör çarpımları $\mathcal{O}(N \log N)$ sürede ve $\mathcal{O}(N \log N)$ bellek kullanımıyla gerçekleştirilebilmektedir.

4. Blok-Diyagonal Öniyeleştiriciler

İteratif çözümlerde ihtiyaç duyulan matris-vektör çarpımlarının sayısını azaltmak için öniyeleştirici tekniklerden faydalanılmıştır. Özellikle, EMABAİD'nin yapısına uygun olarak geliştirilen 4PBDÖ ile iteratif yakınsamalar önemli ölçüde hızlandırılmıştır. Bu öniyeleştirici, birbirlerine çok yakın olan RWG fonksiyonları arasındaki etkileşimlerin kullanılmasıyla oluşturulmaktadır. Elde edilen öniyeleştirici matris

$$\bar{\mathbf{P}}_{4P} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)} & \bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)} \\ \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N}^{(21)} & \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N_D}^{(22)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Z}}_{N \times N}^{(11)} & \bar{\mathbf{Z}}_{N \times N_D}^{(12)} \\ \bar{\mathbf{Z}}_{N_D \times N}^{(21)} & \bar{\mathbf{Z}}_{N_D \times N_D}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (2)$$

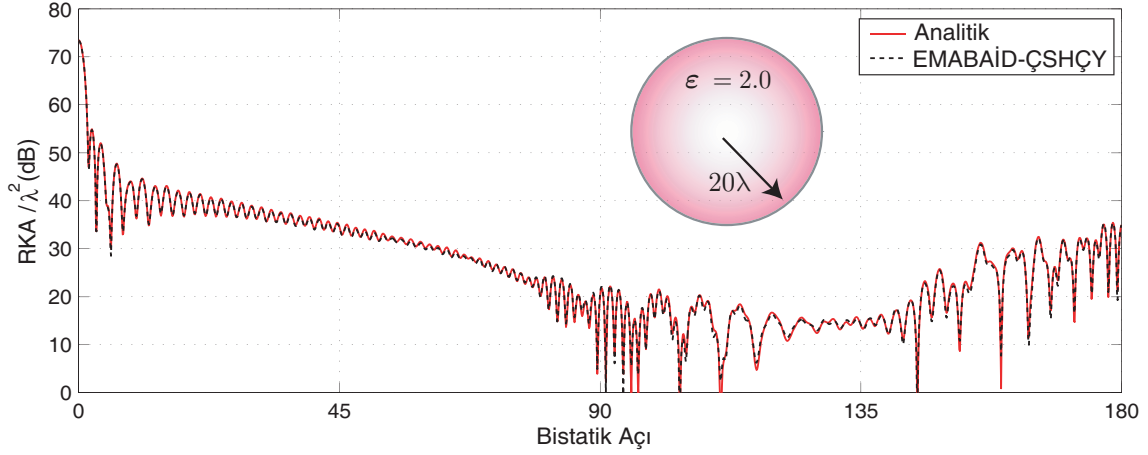
şeklinde yazılabilir. Burada $\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)}$ ve $\bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N_D}^{(22)}$ matrisleri blok-diyagonal yapıdadır. $\bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)}$ ve $\bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N}^{(21)}$ matrisleri de bloklardan oluşmaktadır, ancak bu matrisler genel olarak dikdörtgendir. Öniyeleştirici matrisin tersi

$$\bar{\mathbf{P}}_{4P}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{N \times N}^{(11)} & \bar{\mathbf{B}}_{N \times N_D}^{(12)} \\ \bar{\mathbf{B}}_{N_D \times N}^{(21)} & \bar{\mathbf{B}}_{N_D \times N_D}^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{N \times N}^{(11)} = (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} + (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)} \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{N \times N}^{(21)} = (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} + (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)} \cdot (\mathbf{S}_{N_D \times N_D})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N}^{(21)} \cdot (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{N \times N_D}^{(12)} = -(\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)} \cdot (\mathbf{S}_{N_D \times N_D})^{-1} \quad (6)$$



Şekil 1. Yarıçapı 20 dalga boyu ve göreceli dielektrik sabiti 2.0 olan homojen küreye ait bistatik RKA değerleri.

$$\bar{\mathbf{B}}_{N_D \times N}^{(21)} = -(\mathbf{S}_{N_D \times N_D})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N}^{(21)} \cdot (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{N_D \times N_D}^{(22)} = (\mathbf{S}_{N_D \times N_D})^{-1} \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_{N_D \times N_D} = \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N_D}^{(22)} - \bar{\mathbf{P}}_{N_D \times N}^{(21)} \cdot (\bar{\mathbf{P}}_{N \times N}^{(11)})^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}_{N \times N_D}^{(12)} \quad (9)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buradaki işlemlerin hepsi $\mathcal{O}(N)$ karmaşıklığıyla gerçekleştirilebilmektedir.

5. Sayısal Örnekler

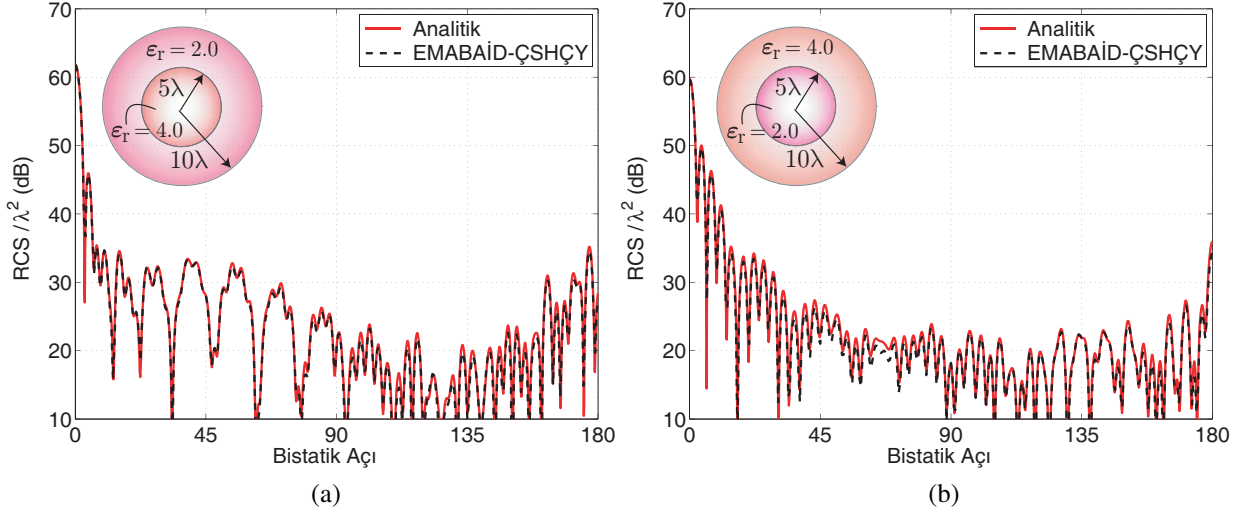
Geliştirilen benzetim ortamının verimliliğini ve doğruluğunu test etmek amacıyla büyük küresel cisimler içeren saçılım problemleri çözülmüştür. Şekil 1’de yarıçapı 20 dalga boyu ve göreceli dielektrik sabiti 2.0 olan homojen küreye ait saçılım probleminin çözümleri sunulmuş, bu hedefin radar kesit alanı (RKA) değerleri bistatik açığa bağlı olarak gösterilmiştir. EMABAİD ile elde edilen sayısal değerlerin Mie serisiyle elde edilen analitik değerlerle son derece tutarlı oldukları gözlemlenmektedir. Bu problemin sayısal çözümünde 2,925,708 bilinmeyenli matris denklemi oluşturulmuş ve çözülmüştür. 4PBDÖ ile hızlandırılmış BiCGSTAB yöntemiyle gerçekleştirilen çözümde 0.001 hataya 92 iterasyonda ulaşılmıştır. Aynı problemin, geleneksel formülasyonlarla ve öniyleştirici kullanmadan gerçekleştirilen çözümlerinde ise gerekli iterasyon sayısı 1000’in üzerindedir.

Şekil 2’de dielektrik kabukla kaplanmış dielektrik kürelere ait saçılım problemlerinin çözümleri sunulmuştur. Kürenin ve kabuğun yarıçapları 5 ve 10 dalga boyudur. Sayısal çözümler için cismin ayrıklaştırılması sonucunda 1,264,128 bilinmeyenli matris denklemleri oluşturulmuş ve çözülmüştür. Şekil 2(a)’da, kürenin ve kabuğun göreceli dielektrik sabitlerinin sırasıyla 2.0 ve 4.0 olduğu durumda elde edilen RKA değerleri gösterilmiştir. Şekil 2(b)’de ise küre ve kabuğun göreceli dielektrik sabitleri sırasıyla 4.0 ve 2.0’dir. Her iki durumda da sayısal değerler analitik değerlerle tutarlıdır. Bu problemlerin çözümlerinde 0.001 hata için ihtiyaç duyulan iterasyon sayısı 101 ve 283’tür.

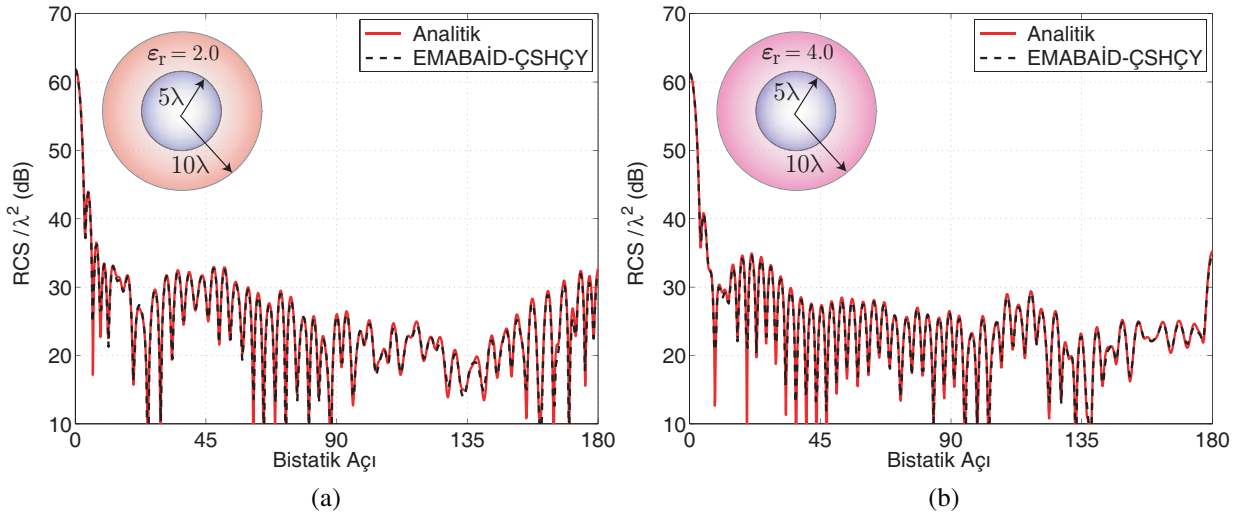
Son olarak, Şekil 3’te dielektrik kabukla kaplanmış metalik kürelere ait saçılım problemlerinin çözümleri sunulmuştur. Önceki örneklerde olduğu gibi, kürenin ve kabuğun yarıçapları 5 ve 10 dalga boyudur. Ayrıklaştırma sonucunda 1,015,752 bilinmeyenli matris denklemleri oluşturulmuş ve çözülmüştür. Şekil 3(a) ve 3(b)’de kabuğun göreceli dielektrik sabitinin sırasıyla 2.0 ve 4.0 olduğu durumlardaki RKA değerleri gösterilmiştir. Sayısal değerlerin analitik değerlerle yine son derece tutarlı oldukları gözlemlenmektedir. Çözümlerde 0.001 hataya ulaşmak için gerekli olan iterasyon sayısı 75 ve 187’dir.

6. Sonuç

EMABAİD, ÇSHÇY, iteratif yöntemler ve öniyleştiricilerin kullanılmasıyla dielektrik cisimler içeren milyonlarca bilinmeyenli saçılım problemlerinin çözümleri gerçekleştirilmiştir. Kurulan benzetim ortamının hassasiyeti çok büyük küre problemleri üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 2. Yarıçapı 5 ve 10 dalga boyu olan dielektrik küre ve kabuktan oluşan yapıya ait bistatik RKA değerleri. Kürenin ve kabuğun göreceli dielektrik sabitleri sırasıyla (a) 2.0 ve 4.0, (b) 4.0 ve 2.0 olarak seçilmiştir.



Şekil 3. Yarıçapı 5 ve 10 dalga boyu olan metalik küre ve dielektrik kabuktan oluşan yapıya ait bistatik RKA değerleri. Kabuğun göreceli dielektrik sabiti (a) 2.0 ve (b) 4.0 olarak seçilmiştir.

Kaynaklar

- [1] A. J. Poggio ve E. K. Miller, "Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems," *Computer Techniques for Electromagnetics*, R. Mittra, Ed. Oxford: Pergamon Press, 1973, Bölüm 4.
- [2] C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. New York: Springer, 1969.
- [3] P. Ylä-Oijala ve M. Taskinen, "Application of combined field integral equation for electromagnetic scattering by dielectric and composite objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 53, no. 3, s. 1168–1173, Mart 2005.
- [4] Ö. Ergül ve L. Gürel, "Diyelektrik cisimlerin iteratif çözümünde integral denklemi formülasyonlarının incelenmesi," *URSI-Türkiye 2006 Bilimsel Kongresi*, Ankara, Türkiye, 2006, s. 46–48.
- [5] J. Song, C.-C. Lu ve W. C. Chew, "Multilevel fast multipole algorithm for electromagnetic scattering by large complex objects," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt 45, no. 10, s. 1488–1493, Ekim 1997.